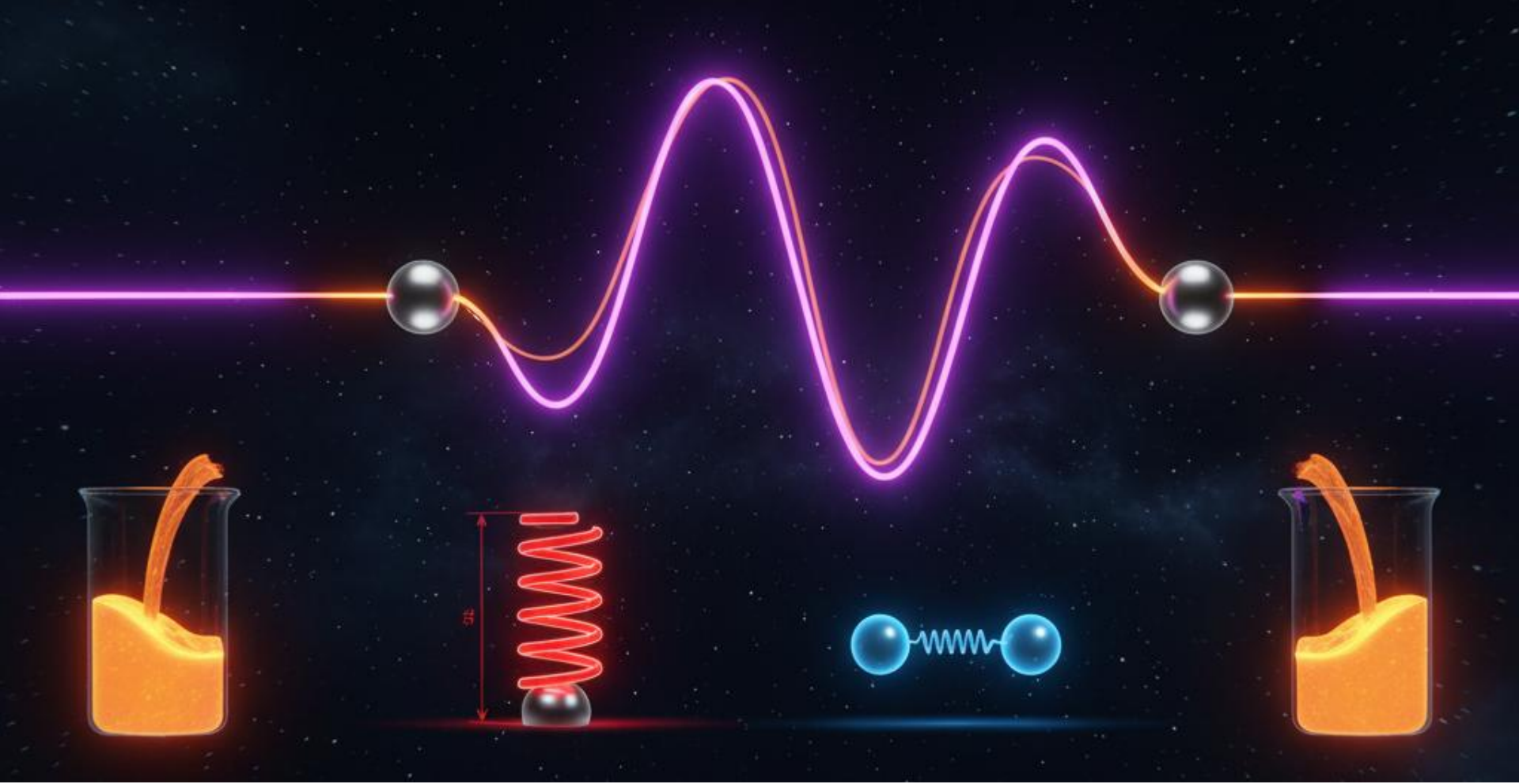




FIZYKA Z ELEMENTAMI FIZYKI RADIACYJNEJ I | WYKŁAD 7

Ruch drgający

dr inż. Katarzyna Gwóźdź

Siła Hooke'a

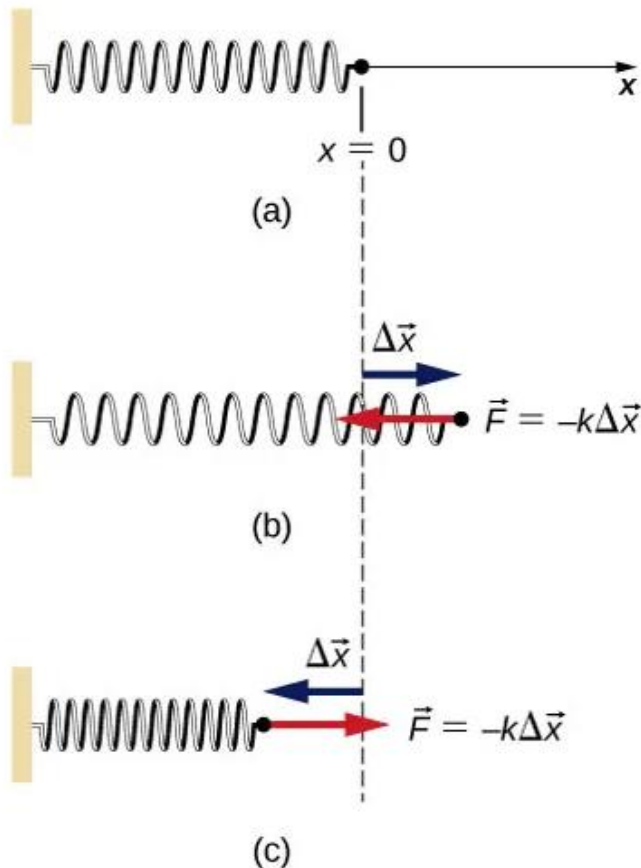
Siła wprowadzająca w ruch sprężynę po odchyleniu od stanu równowagi

Prawo Hooke'a:

$$\vec{F}(\vec{x}) = -k\Delta\vec{x}$$
$$\Delta\vec{x} = \vec{x} - \vec{x}_{\text{równowagi}}$$

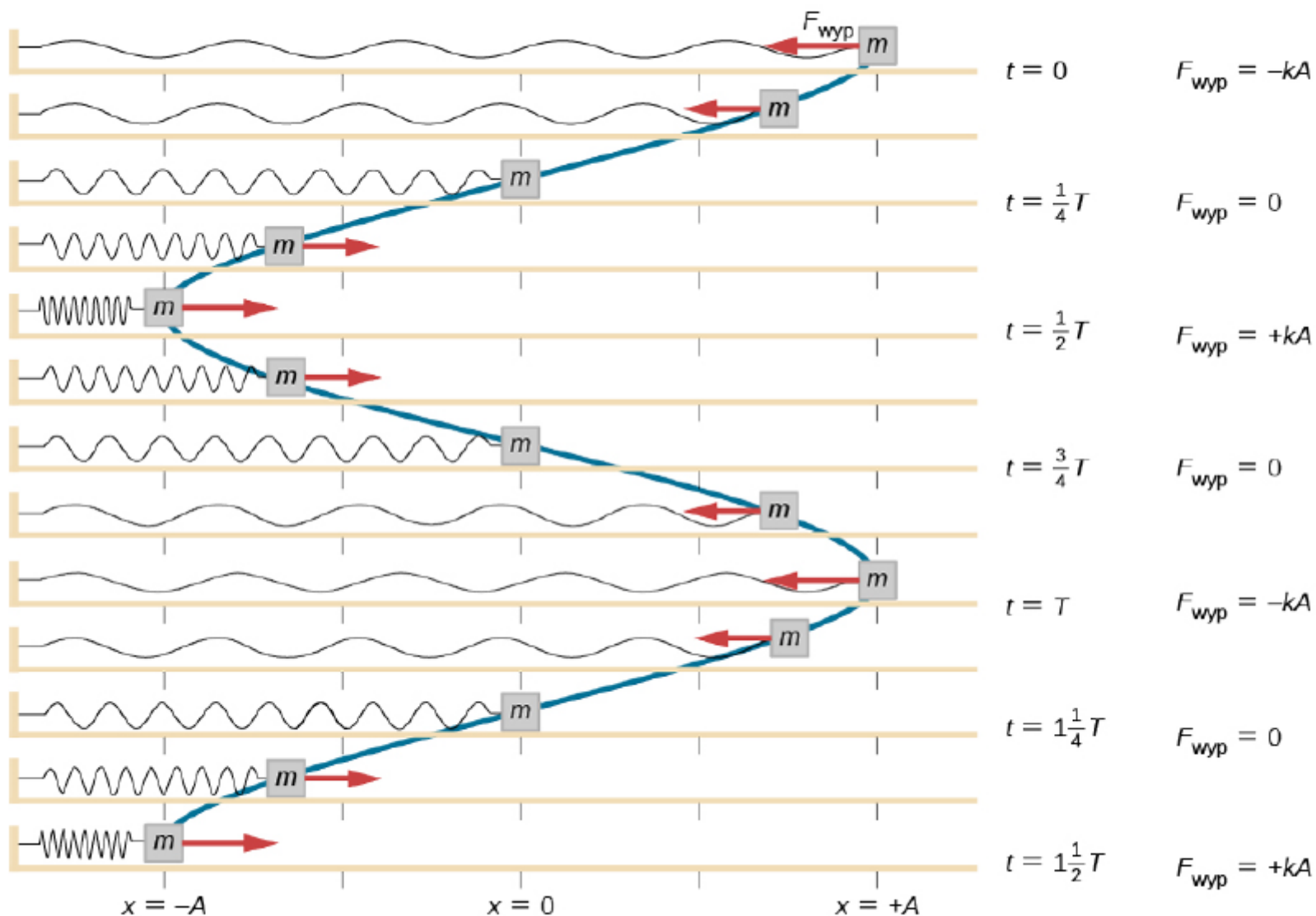
Jeśli $\vec{x}_{\text{równowagi}} = 0$

$$\vec{F}(\vec{x}) = -k\vec{x}$$

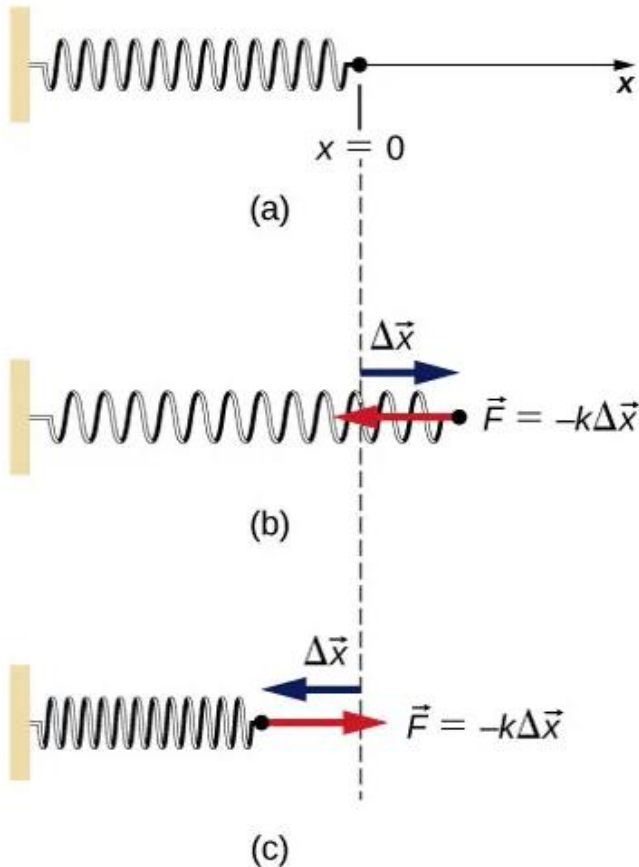


Oscylator harmoniczny

<https://openstax.org/books/fizyka-dla-szk%C3%B3%C5%82-wy%C5%BCszych-tom-1/pages/15-1-ruch-harmoniczny>



Siła Hooke'a



$$\vec{F}(x) = -k\vec{x}$$

$$\vec{F}_{wyp} = \vec{F}(x)$$

$$ma = -kx$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Oscylator harmoniczny

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

Drgania własne:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Rozwiązanie formalne:

Andrzej Odrzywołek „Rozwiązanie równania oscylatora harmonicznego”, Foton 120, 2013

<https://ruj.uj.edu.pl/server/api/core/bitstreams/1a22c01d-5445-44f7-90f3-67d5ae275ea7/content>

Oscylator harmoniczny

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi)$$

$$\omega_0^2 x = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$-A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \phi) + A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \phi) = 0$$

Oscylator harmoniczny

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad v = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi) \quad a = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \phi) = -\omega_0^2 x$$

$$x_{max} = A$$

$$v_{max} = A\omega_0$$

$$a_{max} = A\omega_0^2$$

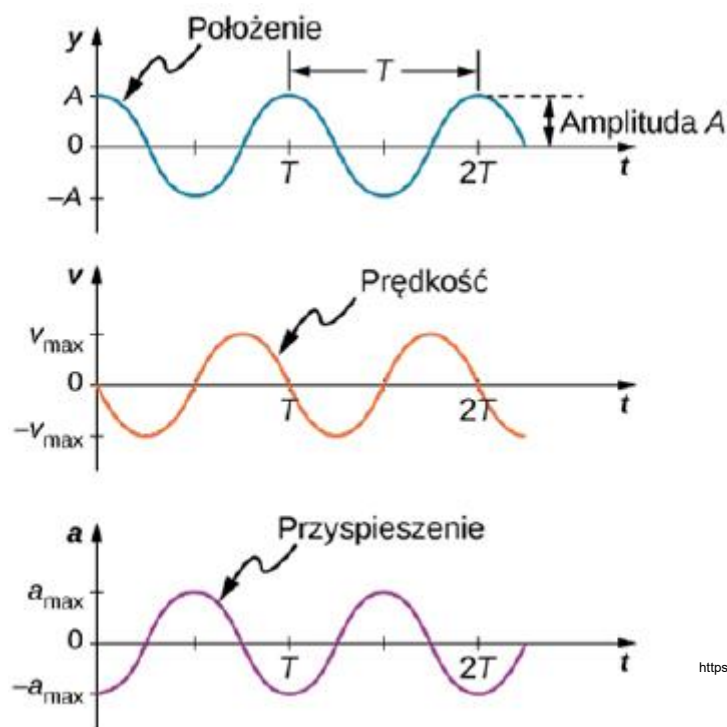
$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Oscylator harmoniczny

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad v = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi) \quad a = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \phi) = -\omega_0^2 x$$



<https://openstax.org/books/fizyka-dla-szk%C3%B3%C5%82-wy%C5%BCszych-tom-1/pages/15-1-ruch-harmoniczny>

Energia w ruchu harmonicznym

Aby odkształcić sprężynę musimy wykonać pracę.

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

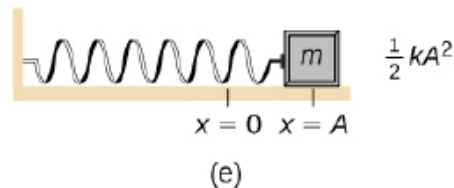
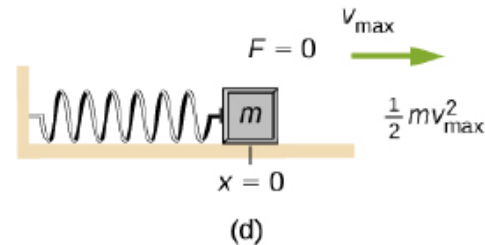
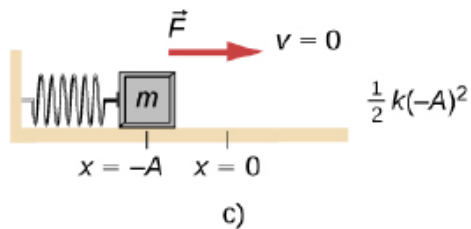
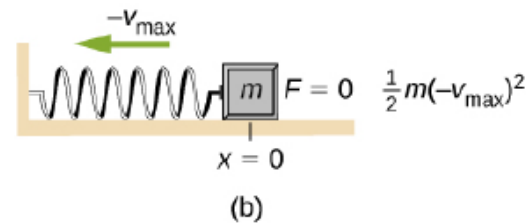
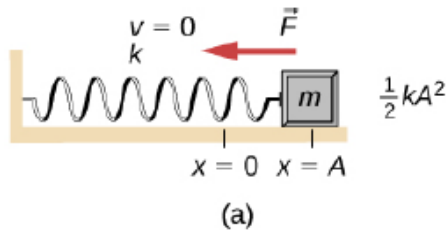
$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

Energia w ruchu harmonicznym

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} mv^2$$

$$E_c = E_p + E_k$$



Energia w ruchu harmonicznym

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} mv^2$$

$$E_c = E_p + E_k$$



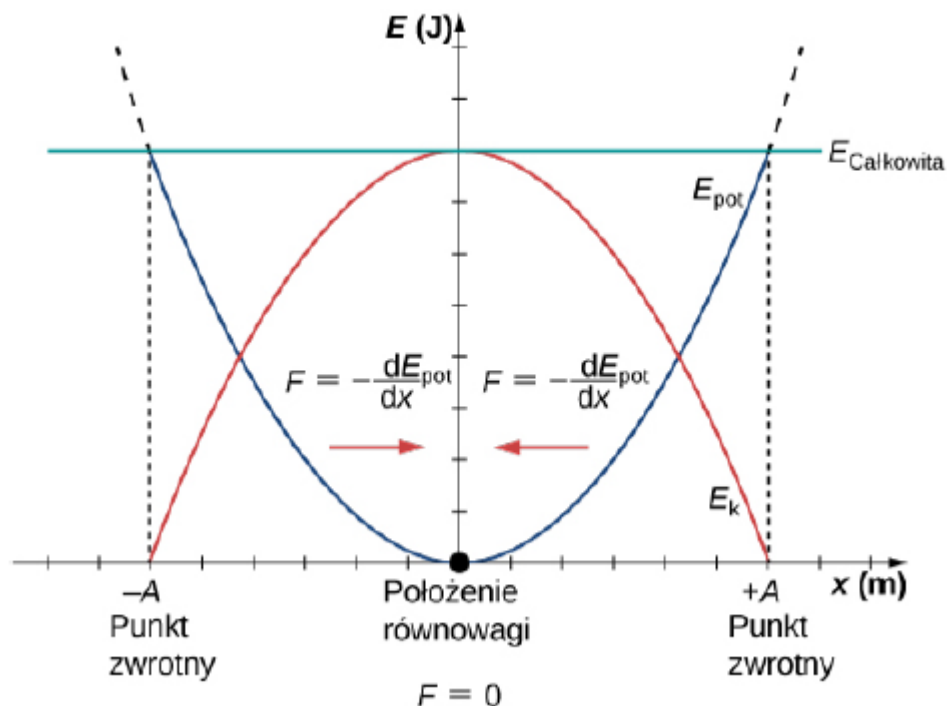
<https://openstax.org/books/fizyka-dla-szk%C3%B3%C5%82-wy%C5%BCszych-tom-1/pages/15-1-ruch-harmoniczny>

Energia w ruchu harmonicznym

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2$$

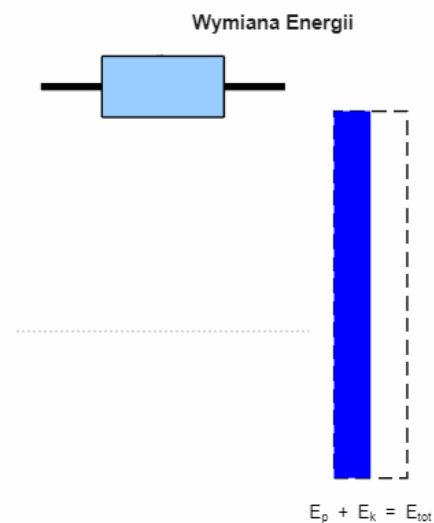
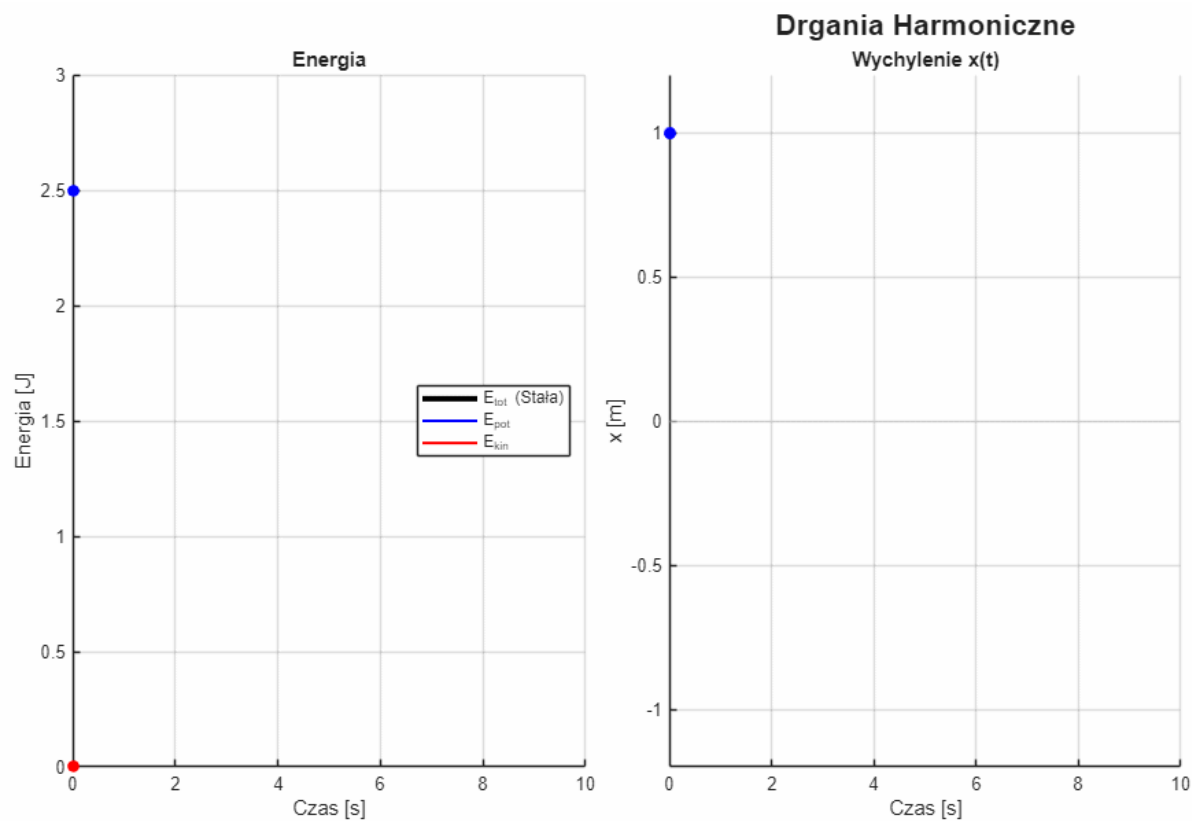
$$E_k = \frac{1}{2} mv^2$$

$$E_c = E_p + E_k$$



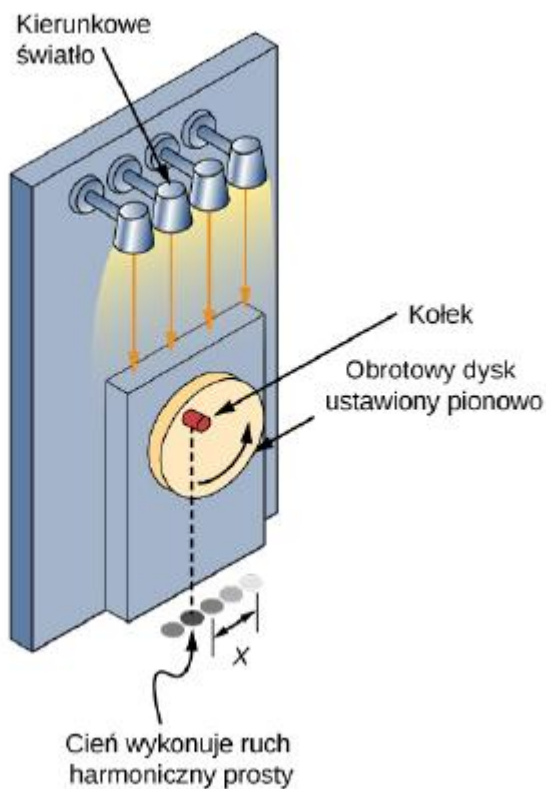
<https://openstax.org/books/fizyka-dla-szk%C3%B3%C5%82-wy%C5%BCszych-tom-1/pages/15-1-ruch-harmoniczny>

Energia w ruchu harmonicznym



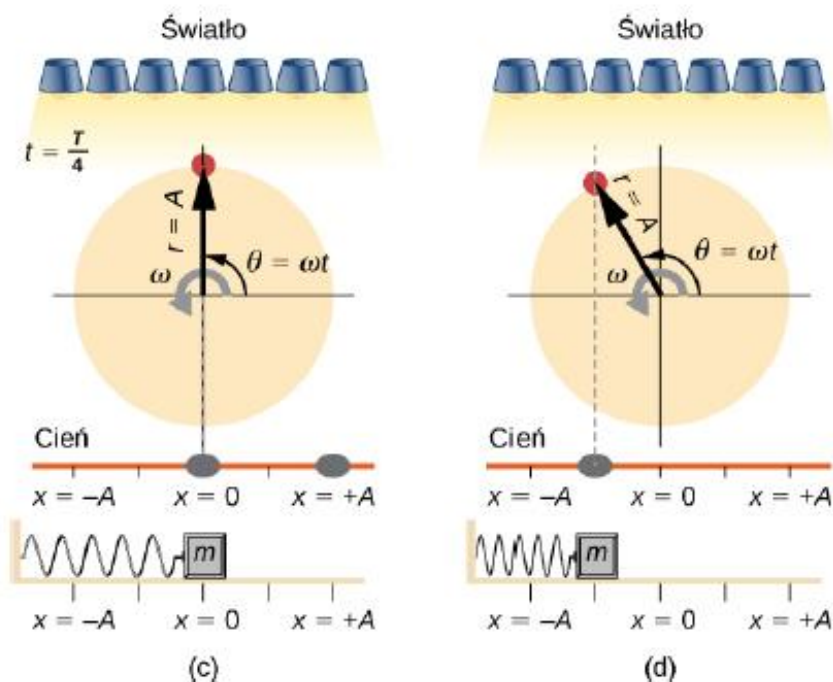
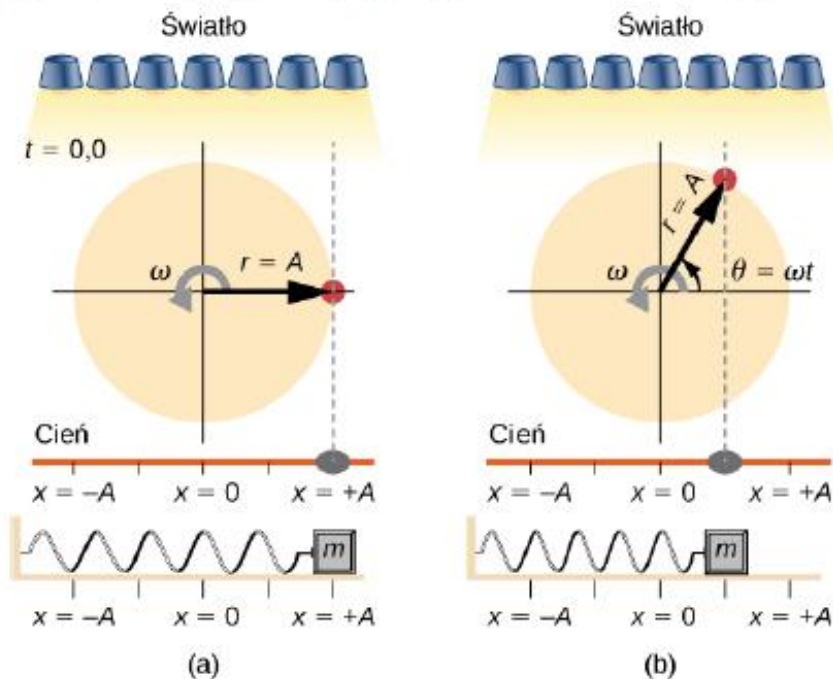
Porównanie z ruchem po okręgu

Doświadczenie 8.1



<https://openstax.org/books/fizyka-dla-szk%C3%B3%C5%82-wy%C5%BCszych-tom-1/pages/15-1-ruch-harmoniczny>

Porównanie z ruchem po okręgu



$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$y(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi)$$

$$v(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi)$$

$$a(t) = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \phi) = -\omega_0^2 x$$

<https://openstax.org/books/fizyka-dla-szk%C3%B3%C5%82-wy%C5%BCszych-tom-1/pages/15-1-ruch-harmoniczny>

Wahadło matematyczne

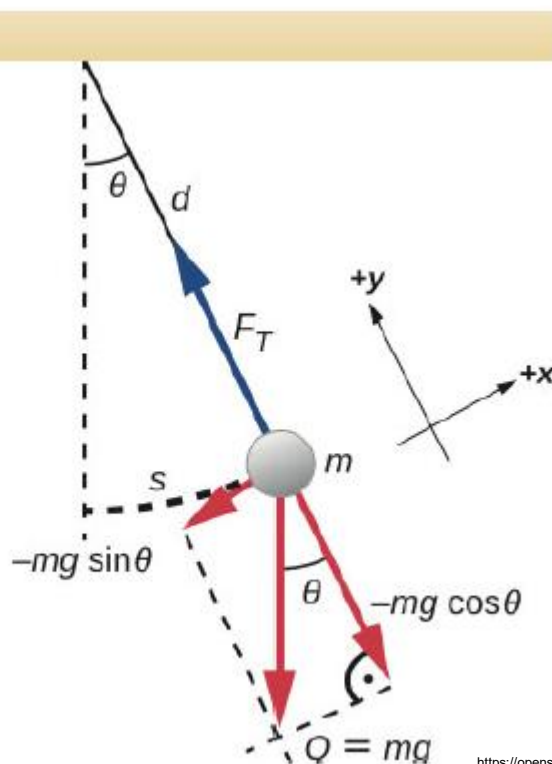
Punktowa masa zawieszona na nieważkiej, nierozciągliwej nici.

$$M_{F_g} = -dmg \sin \theta$$

$$I\varepsilon = -dmg \sin \theta$$

$$md^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -dmg \sin \theta$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{d} \sin \theta = 0$$

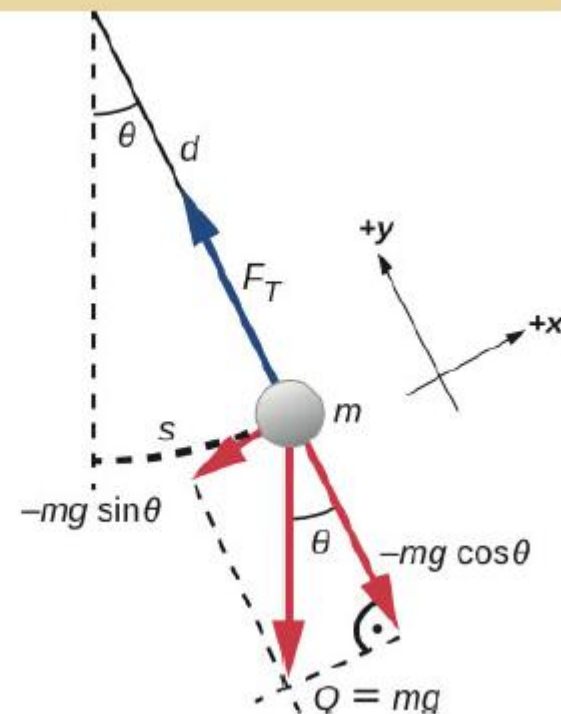
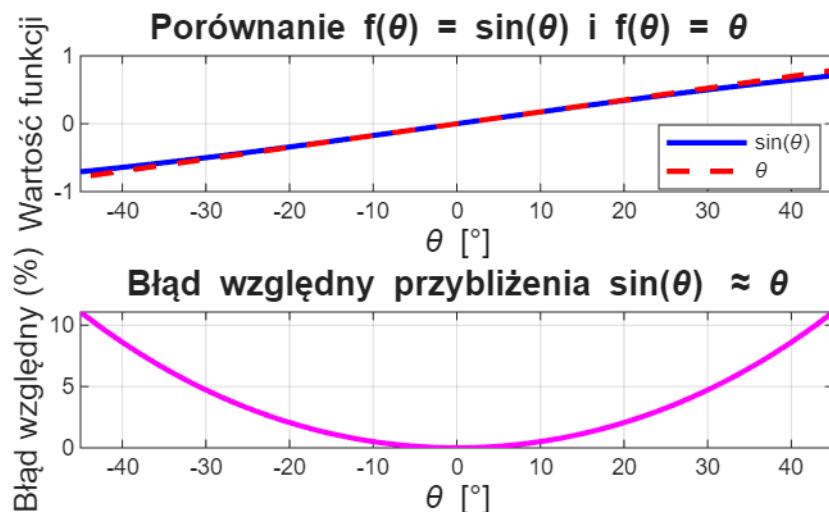


Wahadło matematyczne

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{d} \sin \theta = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{d} \theta = 0$$

$$\sin \theta \approx \theta$$



Wahadło matematyczne

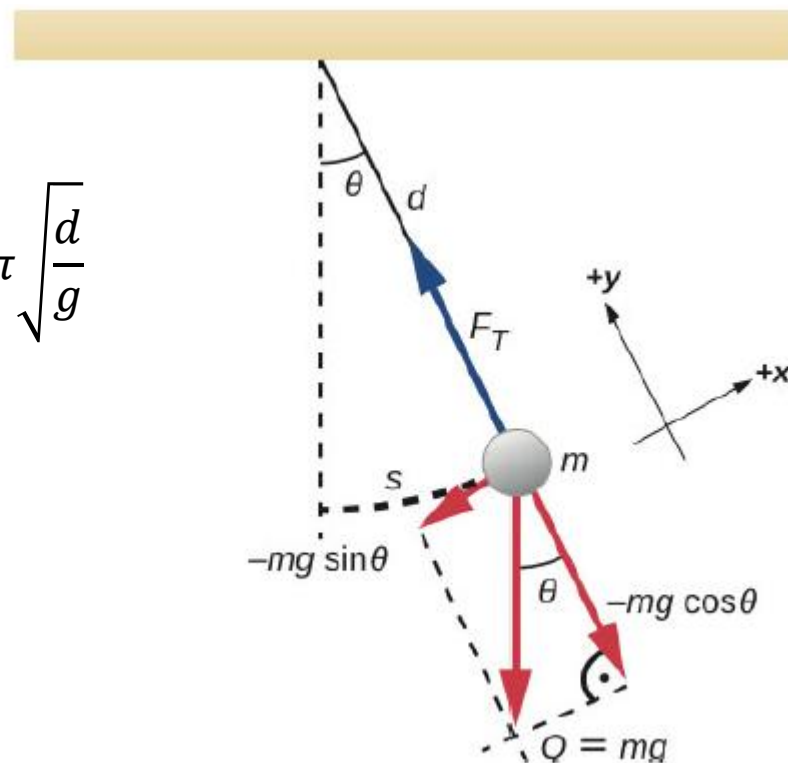
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{d}\theta = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0 \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{d}} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{d}{g}}$$

$$\theta(t) = \theta_{max} \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$\omega(t) = -\theta_{max}\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi)$$

$$\varepsilon(t) = -\theta_{max}\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \phi) = -\omega_0^2\theta$$



Ruch wahadła matematycznego może być przybliżony za pomocą oscylatora harmonicznego dla małych kątów wychylenia.

Wahadło fizyczne

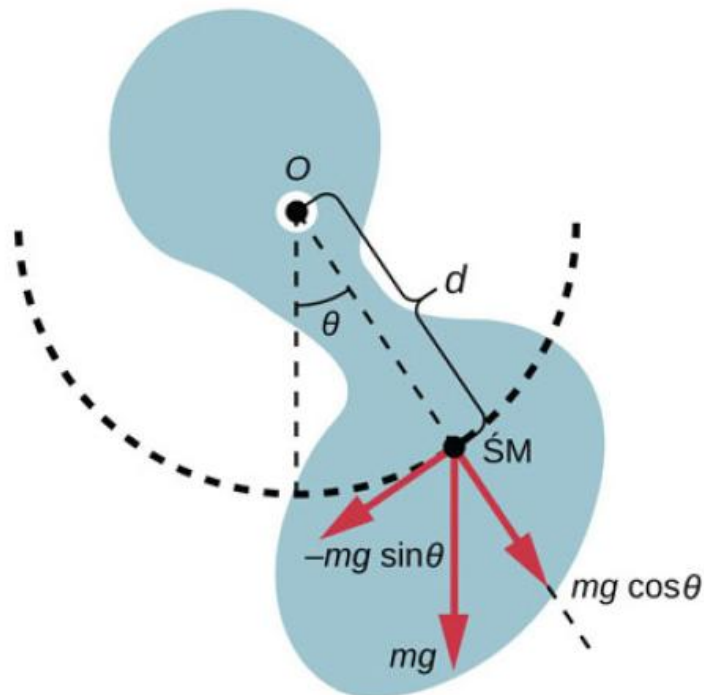
Bryła sztywna wykonująca drgania wokół osi obrotu.

$$M_{F_g} = -dmg \sin \theta$$

$$I\varepsilon = -dmg \sin \theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{dmg}{I} \sin \theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{dmg}{I} \theta = 0$$



Wahadło fizyczne

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{dmg}{I}\theta = 0$$

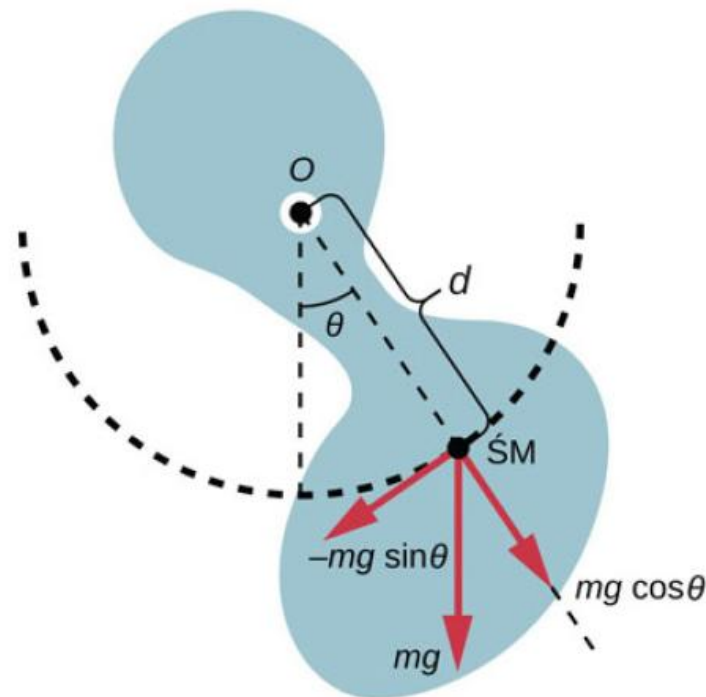
$$\theta(t) = \theta_{max} \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$\omega(t) = -\theta_{max}\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi)$$

$$\varepsilon(t) = -\theta_{max}\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \phi) = -\omega_0^2\theta$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{dmg}{I}}$$

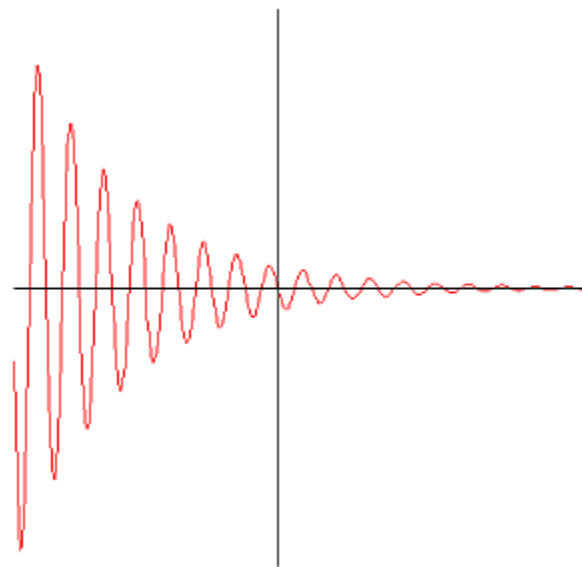
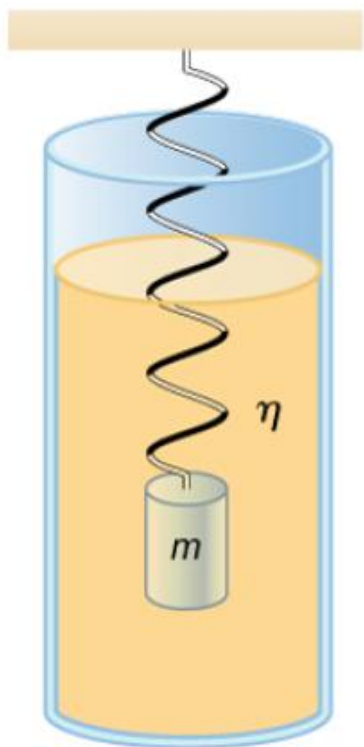
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{dmg}}$$



Ruch wahadła fizycznego może być przybliżony za pomocą oscylatora harmonicznego dla małych kątów wychylenia.

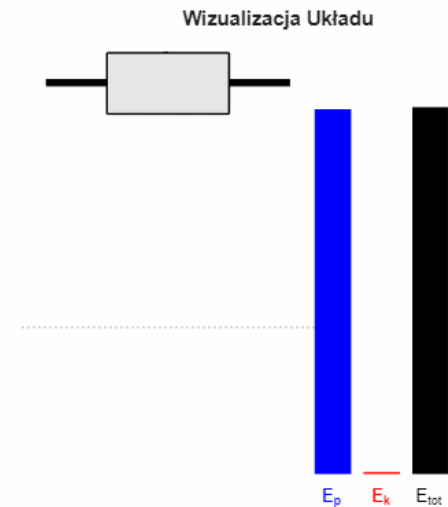
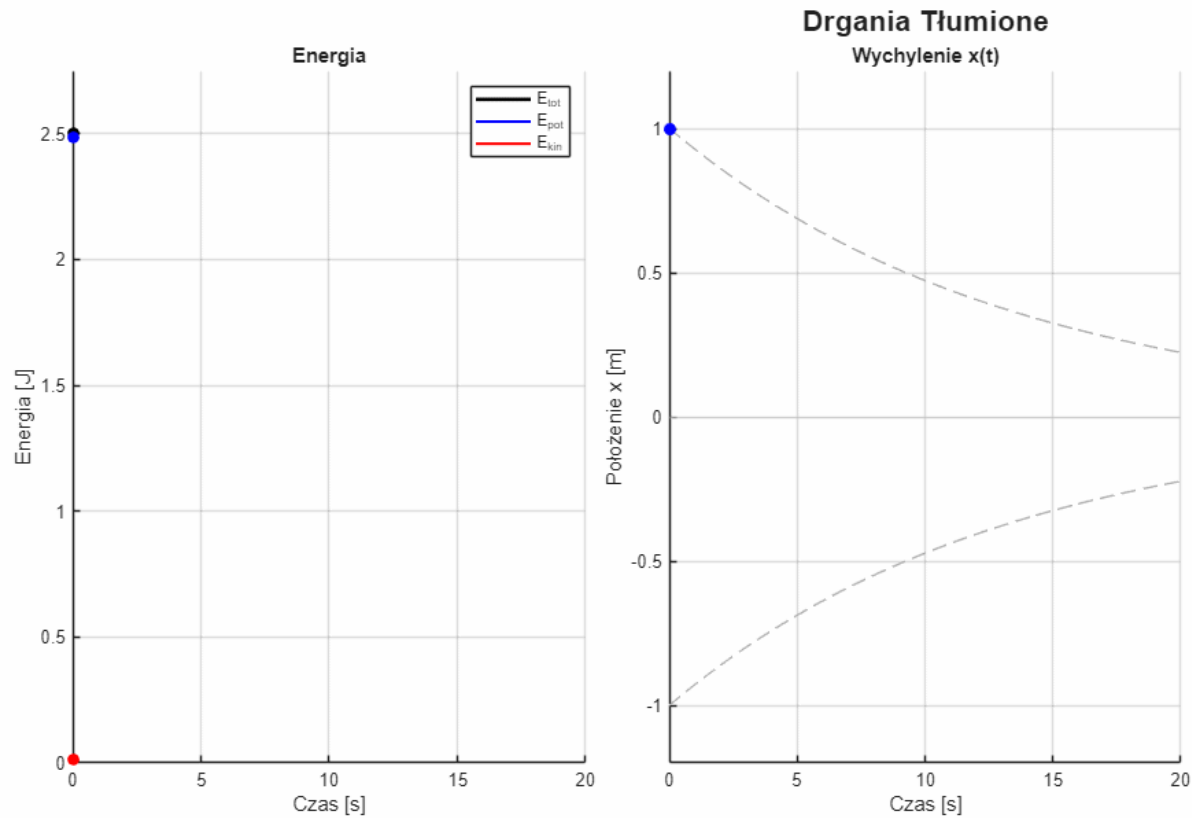
Drgania tłumione

Siła tłumiąca jest proporcjonalna do prędkości ciała drgającego.



Autorstwa Lips - Praca własna, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=17742551>

Drgania tłumione

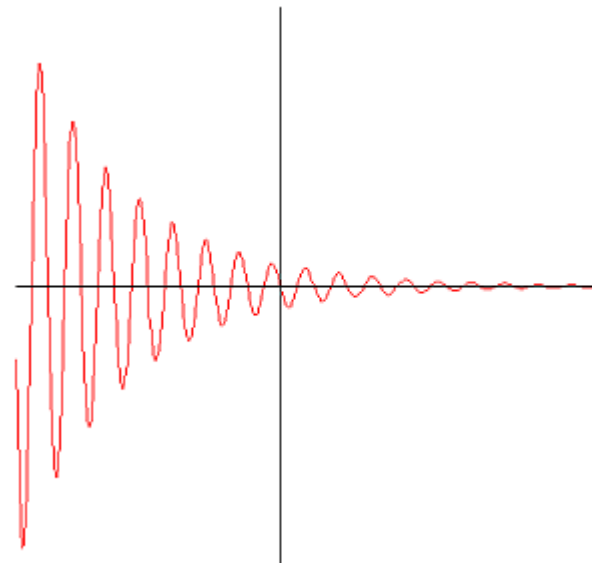


Drgania tłumione

$$\vec{F}_{wyp} = \vec{F}_{tł} + \vec{F}_x$$

$$ma = -bv - kx$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

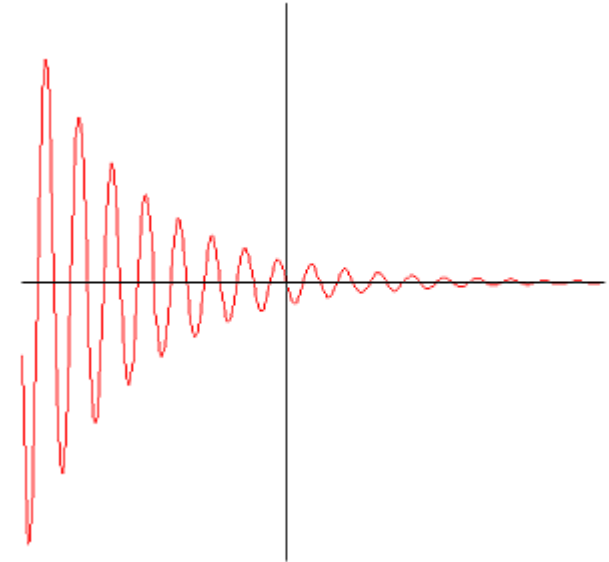


Drgania słabo tłumione

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$x(t) = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega_{tł} t + \phi)$$

$$\omega_{tł} = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$



Drgania własne:

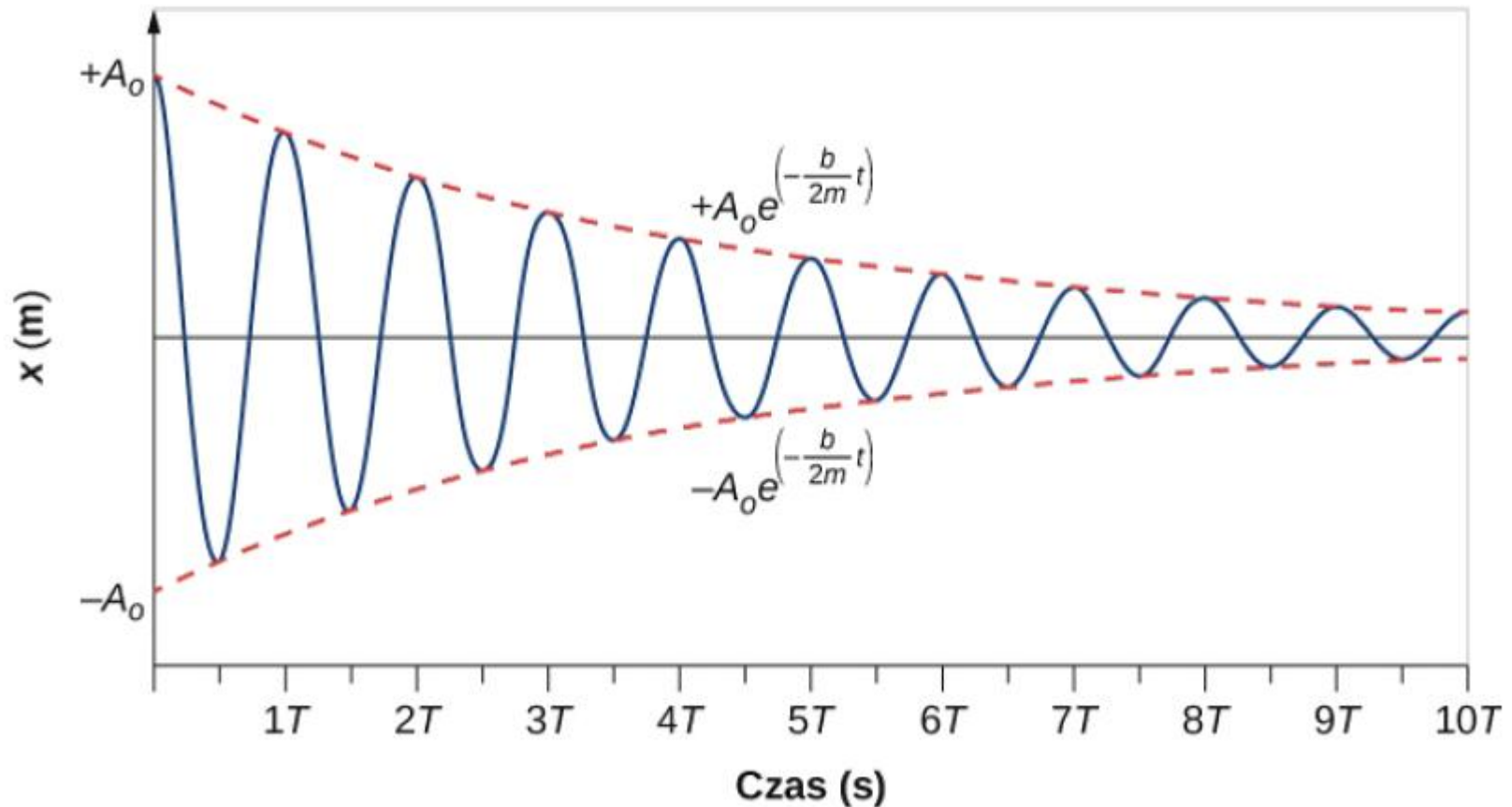
$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Drgania tłumione:

$$\omega_{tł}^2 = \frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2$$

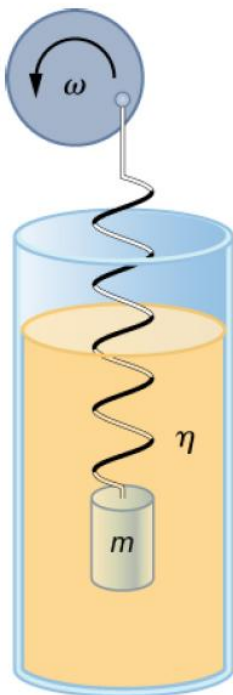
Ogania słabo tłumione

$$x(t) = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega_{tł} t + \phi) \quad \omega_{tł} = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$



Drgania wymuszone

Drgania wymuszone i podtrzymywane przez zewnętrzną siłę okresową.



$$\vec{F}_{wyp} = \vec{F}_{hook} + \vec{F}_{tł} + \vec{F}_{wym}$$
$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt} + F_0 \sin(\omega_{wym} t)$$

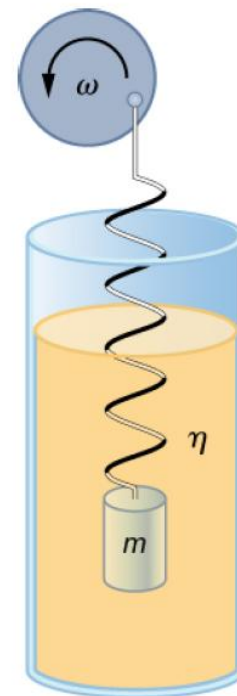
Drgania wymuszone

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt} + F_0 \sin(\omega_{wym} t)$$

Dla stanu ustalonego:

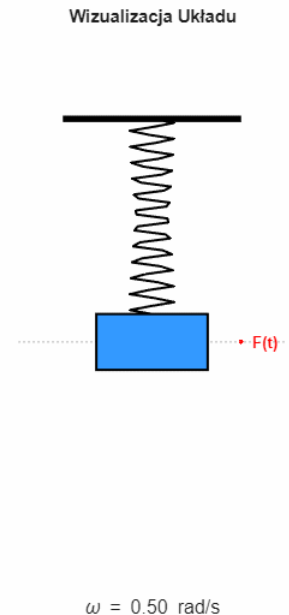
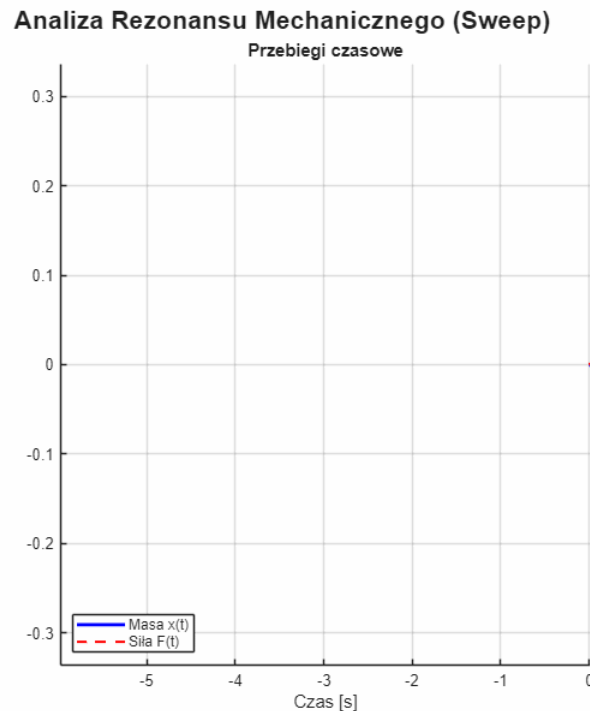
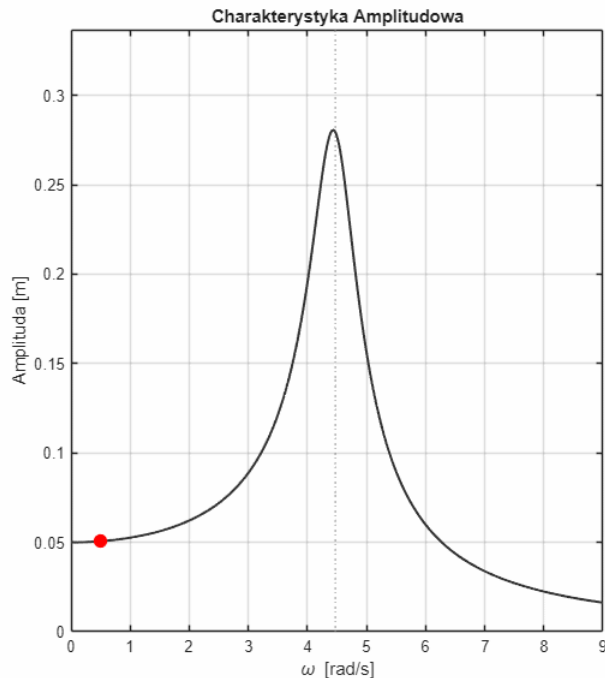
$$x(t) = A \cos(\omega_{wym} t + \phi)$$

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega_{wym}^2)^2 + b^2 \omega_{wym}^2}}$$



Rezonans

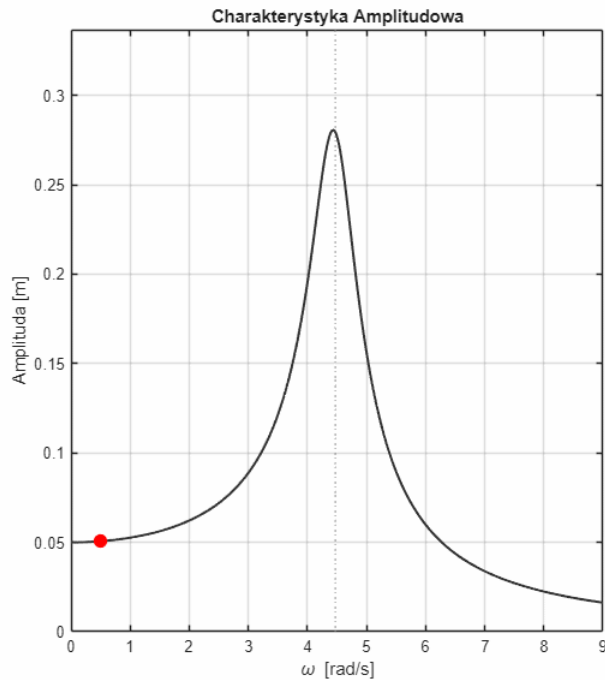
Gdy częstotliwość siły wymuszającej jest równa częstotliwości własnej układu, amplituda drgań gwałtownie wzrasta.



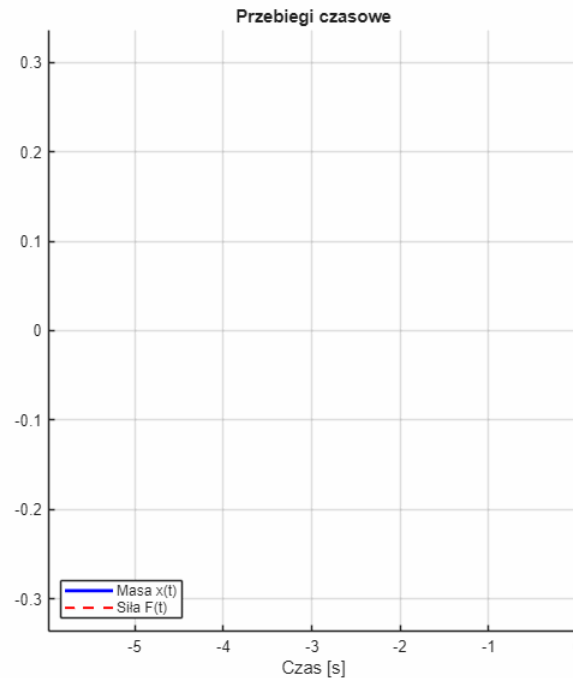
Rezonans

$$A_{max} = \frac{F_0}{b \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{4m^2}}}$$

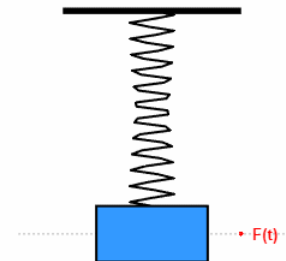
$$\omega_{rez} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{2m^2}}$$



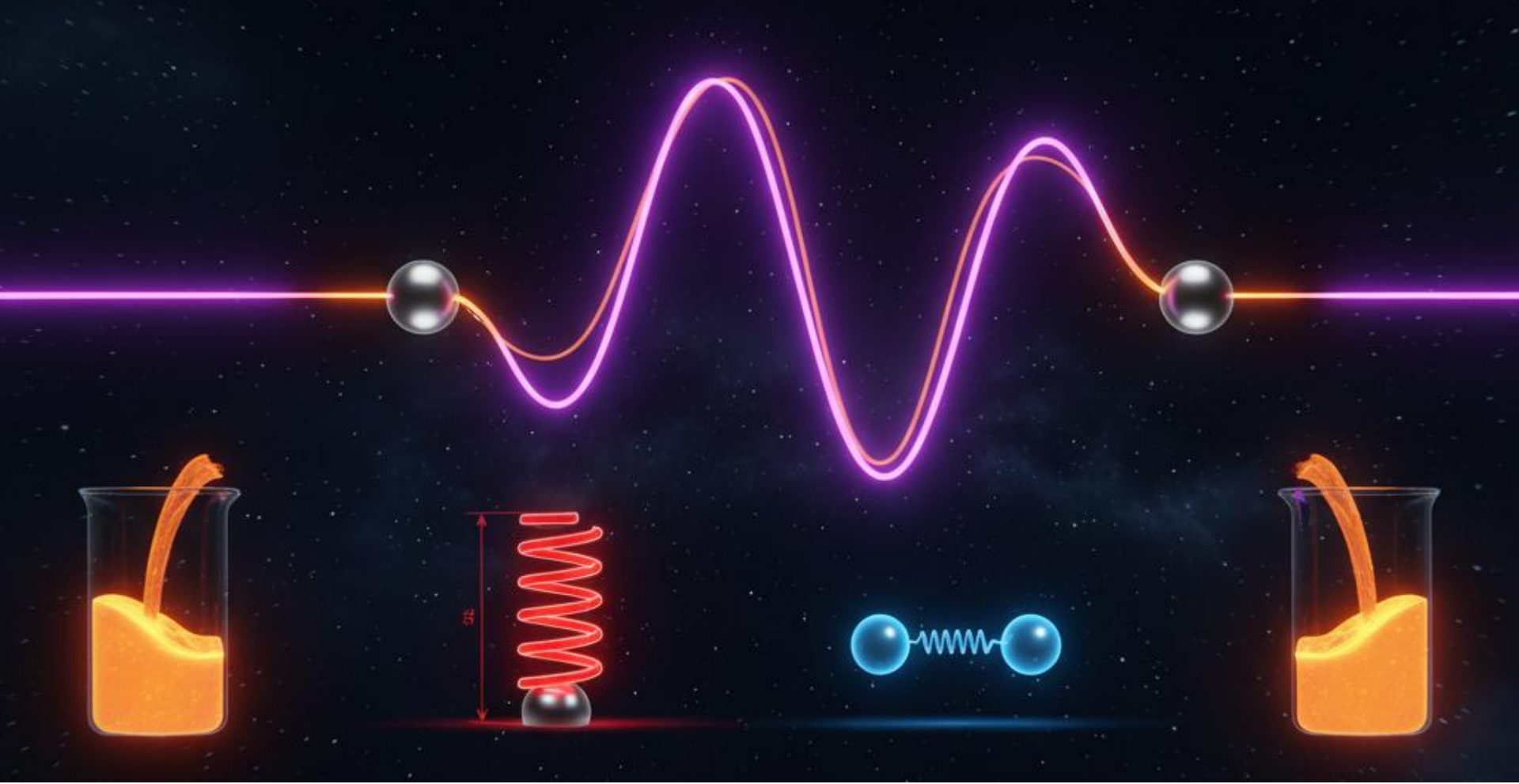
Analiza Rezonansu Mechanicznego (Sweep)



Wizualizacja Układu



$\omega = 0.50 \text{ rad/s}$



FIZYKA Z ELEMENTAMI FIZYKI RADIACYJNEJ I | WYKŁAD 7

Dziękuję za uwagę

dr inż. Katarzyna Gwóźdź